ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.12 1981

А.С.Л а з а р е в

О ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ,ДОПУСКАЮЩИХ ЧАСТИЧНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В работе исследуются поверхности,допускающие частично параллельные поверхности,инвариантным образом определяется поднормаль нормали данной поверхности и рассматриваются некоторые ее свойства.

I.Гладкую поверхность $V_p \subset E_n$ отнесем к подвижному ортонормированному реперу $\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$ $(i,j,k=1,2,\dots,p;$ $\alpha,\beta,\gamma=p+1,\dots,n)$. Векторы $\vec{e}_i$ направим параллельно касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности V_p в ее точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ -параллельно нормали $N_{n-p}(x)$.Имеем

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha,\quad d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta. \qquad (1)$$

Формы Пфаффа,входящие в формулы (1),удовлетворяют известным уравнениям структуры евклидова пространства и условиям ортонормированности подвижного репера. Имеем тождества $\omega^\alpha=0$,продолжая которые,получим $\omega_i^\alpha=$ $=b_{ij}^\alpha\omega^j$, $b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha$.

Пусть задано инвариантное поле нормального к поверхности V_p единичного вектора,который мы примем за вектор $\vec{e}_n$.Тогда формы ω_n^α -главные.Пусть $\omega_n^\alpha=c_{ni}^\alpha\omega^i$. Если на поверхности V_p фиксирована ортогональная сеть и векторы $\vec{e}_i$ касаются линий сети,то система величин c_{ni}^α при каждом фиксированном i образует вектор $\vec{c}_{ni}=c_{ni}^\alpha\vec{e}_\alpha$.

Рассмотрим поверхность (y),заданную уравнением

$$\vec{y}=\vec{x}+y\vec{e}_n,\quad y=\mathrm{const}. \qquad (2)$$

Находим

$$d\vec{y}=\{\sum_i(\delta_k^i-yb_{ik}^n)\vec{e}_i+y\vec{c}_{nk}\}\omega^k. \qquad (3)$$

Как показано в [3],поверхность (y) $\frac{\ell}{p}$-параллельна поверхности V_p тогда и только тогда,когда

$$\mathrm{rang}(\vec{c}_{ni})=p-\ell. \qquad (4)$$

В нормали N_{n-p} векторы $\vec{c}_{ni}$ определяют $(p-\ell)$-мерную поднормаль $N_{p-\ell}(x)$,которая не зависит от выбора ортогональной сети на поверхности V_p .Из (3) и (4) следует

Т е о р е м а I. Для того,чтобы поверхность (y),заданная уравнением (2),была $\frac{\ell}{p}$-параллельной поверхности V_p ,необходимо и достаточно,чтобы проекция вектора $d\vec{y}$ на нормаль $N_{n-p}(x)$ в каждой точке $x\in V_p$ была параллельной некоторой $(p-\ell)$-мерной поднормали $N_{p-\ell}(x)$ при любом смещении точки x по поверхности V_p .

Направим векторы $\vec{e}_{\alpha_1}$ $(\alpha_1,\beta_1=p+1,\dots,p+(p-\ell))$ параллельно поднормали $N_{p-\ell}(x)$,получим

$$\omega_n^{\alpha_2}=0\quad(\alpha_2=2p-\ell,\dots,n). \qquad (5)$$

Условие (5)-необходимое и достаточное условие $\frac{\ell}{p}$-параллельности поверхностей V_p и (y).

На поверхности V_p определим распределение Δ_ℓ так, что $\Delta_\ell(x)=\{d\vec{x}\mid d\vec{y}\parallel T_p(x)\}$,и рассмотрим поверхность V_{p+1},образованную поверхностью V_p и семейством нормалей $(x,\vec{e}_n)$.Ее уравнение имеет вид:

$$\vec{t}=\vec{x}+t\vec{e}_n,$$

где t -независимое переменное.Если $\vec{e}_{i'}\in\Delta_\ell(x)$ $i',j',k'=\overline{1,\dots,\ell}$, то $\vec{c}_{nk'}=\vec{0}$ (см.[3]) и

$$d\vec{t}=\sum_i(\delta_k^i-yb_{ik}^n)\vec{e}_i\omega^k+t\vec{c}_{nk''}\omega^{k''}+dt\,\vec{e}_n\quad(k''=\ell+1,\dots,p).$$

Таким образом,справедлива

Т е о р е м а 2.Касательная плоскость к поверхности V_{p+1} в каждой точке ее прямолинейной образующей параллельна $(2p-\ell+1)$-мерной плоскости,натянутой на векторы $\vec{e}_i$, $\vec{c}_{nk''}$, $\vec{e}_n$.

2. Поле подномали $N_\ell(x)$ нормали $N_{n-p}(x)$ называют [2] параллельным на поверхности V_p, если каждая ее точка y при любом смещении точки x по поверхности V_p инфинитезимально не выходит из плоскости, параллельной плоскостям $T_p(x)$ и $N_\ell(x)$.

Из теоремы I следует

Т е о р е м а 3. Если поле подномали $N_{p-\ell}(x)$ параллельно на поверхности V_p, то поверхность (y), описанная точкой $y \in N_{p-\ell}(x)$, имеющей постоянный по длине вектор $\vec{xy}$, $\frac{\ell+1}{p}$-параллельна поверхности V_p.

Пусть на поверхности V_p параллельно поле главной нормали $N_q(x)$ [1]. Это имеет место тогда и только тогда, когда [2]

$$\omega_a^\sigma = 0 \quad (a, b = p+1, \ldots, p+q;\ \sigma, \tau = p+q+1, \ldots, n), \tag{6}$$

При этом векторы $\vec{e}_a$ направлены параллельно главной нормали. Вычисляя третий дифференциал радиус-вектора точки x, получим

$$d^3\vec{x} = d\vec{A} + b_{ij}^a\, \omega_a^\sigma\, \vec{e}_\sigma\, \omega^i \omega^j, \tag{7}$$

где вектор $d\vec{A}$ параллелен соприкасающейся плоскости E_{p+q} поверхности V_p. Из (6) и (7) следует, что

$$d^3\vec{x} \parallel E_{p+q}(x). \tag{8}$$

Обратно, если имеют место условия (7) и (8), то

$$b_{ij}^a\, c_{ak}^\sigma\, \omega^i \omega^j \omega^k = 0. \tag{9}$$

Так как коэффициенты в выражениях (9) симметричны по индексам i, j, k, то $b_{ij}^a c_{ak}^\sigma = 0$, откуда следует, что $c_{ak}^\sigma = 0$. Поэтому $\omega_a^\sigma = 0$.

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы поле главной нормали было параллельным на поверхности V_p, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $x \in V_p$ совпадали соприкасающаяся и вторая соприкасающаяся плоскости поверхности V_p.

З а м е ч а н и е. Поверхности, удовлетворяющие условию теоремы 4, лежат в своей соприкасающейся плоскости.

3. Обозначим $N(x)$ – ортогональное дополнение второй соприкасающейся плоскости E_{p+q+q_1} в E_n, $N_{q_1}(x)$ – ортогональное дополнение соприкасающейся плоскости в E_{p+q+q_1}. Положим $\vec{e}_{\sigma_1} \parallel N_{q_1}(x)$ $(\sigma_1 = p+q+1, \ldots, p+q+q_1)$; $\vec{e}_{\bar\sigma_2} = \vec{e}_n \parallel N(x)$, $(\bar\sigma_2 = p+q+q_1+1, \ldots, n-1)$. Пусть точки нормали $(x\vec{e}_n)$ описывают поверхности, $\frac{\ell}{p}$-параллельные поверхности V_p.

Рассмотрим следующие случаи:

а/ векторы $\vec{e}_{\bar\sigma_2}$, $\vec{e}_n$ составляют базис в $N_{p-\ell}(x)$. Имеем

$$\omega_i^\sigma = 0, \quad \omega_n^a = 0, \quad \omega_n^{\sigma_1} = 0, \quad \omega_{\sigma_2}^a = 0 \quad (\sigma_2 = p+q+q_1+1, \ldots, n) \tag{10}.$$

Продолжая тождества (IO), находим

$$b_{i[j}^a\, c_{|a|k]}^{\sigma_1} = 0, \quad c_{n[j}^{\bar\sigma_2}\, c_{|\bar\sigma_2|k]}^{\sigma_1} = 0, \quad c_{\bar\sigma_2[j}^{\sigma_1}\, c_{|\sigma_1|k]}^a = 0, \tag{11}$$

Полагая $\vec{e}_{i'} \in \Delta_\ell(x)$, из (II) получим $c_{\bar\sigma_2 k'}^{\sigma_1} = c_{\sigma_2 k'}^a = c_{\sigma_2 k'}^{\sigma_1} = 0$. Следовательно, каждая точка нормали $N_{p-\ell}(x)$ описывает поверхность, $\frac{\ell}{p}$-параллельную поверхности V_p. Легко убедиться, что таким же свойством обладает подномаль $N_{p-\ell}(x)$ в случаях

б/ $N_{p-\ell}(x) = N_{q_1}(x)$, в/ $N_{p-\ell}(x) = N_q(x)$.

Список литературы

I. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. – Литовск. матем. сб., 1966, 6, №3-4.

2. Ч а к м а з я н А.В. Подмногообразия с параллельным р-мерным подрасслоением нормального расслоения. – Изв. вузов. Математика, 1976, № 8, с. 107-110.

3. Л а з а р е в А.С. О частично параллельных поверхностях в E_n. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. IO. Калининград, 1979.